

BÀI TẬP TỰ RÈN LUYỆN Ở NHÀ DÀNH CHO HỌC SINH KHỐI 11

GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

❖ Giới hạn đặc biệt

➤ Giới hạn hữu hạn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} C = C \quad (C \text{ là hằng số})$$

➤ Giới hạn vô cực, giới hạn ở vô cực:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty, \forall k > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = +\infty, \forall k \in \mathbb{N}^* \text{ và } k \text{ chẵn}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = -\infty, \forall k \in \mathbb{N}^* \text{ và } k \text{ lẻ}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} C = C$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} C = C \quad (C \text{ là hằng số})$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{C}{x^k} = 0, \forall k > 0$$

❖ Quy tắc tính giới hạn hữu hạn:

➤ Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$; $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$ thì

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x).g(x)] = L.M$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \quad (\text{nếu } M \neq 0)$$

➤ Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$

➤ Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |L|$

🌈 Quy tắc này vẫn đúng khi $x \rightarrow +\infty$ hoặc $x \rightarrow -\infty$

❖ Định lý: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$

❖ Quy tắc tính giới hạn vô cực:

➤ Dạng $\frac{L}{\infty}$ và $L \cdot \infty$: Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$ thì

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).g(x) = \begin{cases} +\infty \text{ neu } L > 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty \\ +\infty \text{ neu } L < 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty \\ -\infty \text{ neu } L > 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty \\ -\infty \text{ neu } L < 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty \end{cases}$$

➤ Dạng $\frac{L}{0}$: Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ thì

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty \text{ neu } L > 0, g(x) > 0 \\ +\infty \text{ neu } L < 0, g(x) < 0 \\ -\infty \text{ neu } L > 0, g(x) < 0 \\ -\infty \text{ neu } L < 0, g(x) > 0 \end{cases}$$

Ví dụ 1: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 3x + 5) = (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 5 = 9$

b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x-3} = \frac{2+1}{2-3} = -3$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 7^+} \frac{2x-1}{\sqrt{x+2}-2} = \frac{2 \cdot 7 - 1}{\sqrt{7+2}-2} = 13$$

Nhận xét: Nếu hàm số $y = f(x)$ xác định tại $x = x_0$ thì

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Ví dụ 2: Tính các giới hạn sau:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 2x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^3 \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) \right] = +\infty$$

$$\text{vì } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = 1 - 0 + 0 = 1 > 0$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^3 \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) \right] = -\infty$$

$$\text{vì } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = 1 - 0 + 0 = 1 > 0$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^4 - x^3 + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^4 \left(-1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^4} \right) \right] = -\infty$$

$$\text{vì } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^4} \right) = -1 - 0 + 0 = -1 < 0$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x \right) \text{ vì khi } x \rightarrow -\infty \text{ thì } x < 0 \text{ nên } |x| = -x$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1 \right) \right] = +\infty$$

$$\text{vì } \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1 \right) = -\sqrt{1 + 0 + 0} - 1 = -2 < 0$$

Bài Tập 1: Tính các giới hạn sau:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x^2 + 5} - 3x + 2) \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -3} (x^2 - 2x + 1)$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 4^-} (x^3 - 4x^2 - 2\sqrt{x})$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{3x+3}{x+4} \quad \text{e) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+2}{-3x+2}$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^4 - 4x^3 + 2}{x^3 - 1}$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow -5} \frac{|2x-4|}{x+2} \quad \text{h) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 3x^2 - x)$$

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 3x^2 - x)$$

$$\text{k) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 - 5x + 4) \quad \text{l) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - x^2 + 4x - 3)$$

$$\text{m) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 - 5x + 4} + x)$$

$$\text{n) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 4} - 2x + 3) \quad \text{p) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{3x^2 - 2x + 1} - x)$$

$$\text{q) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^4 - 2x - 5} - 3x^2 + 1)$$

Ví dụ 3: Tính các giới hạn sau:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+4}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2}{x-2} = \frac{2}{-2-2} = \frac{-1}{2}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 + 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x+1)(x^2 - x - 2)}{(x+1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - x - 2}{x+3} = \frac{(-1)^2 - (-1) - 2}{-2+3} = 0$$

Bài Tập 2: Tính các giới hạn dạng vô định $\frac{0}{0}$:

Dạng 1 (tử thức và mẫu thức là đa thức)

Phương pháp: Khi tử thức và mẫu thức là đa thức, ta phân tích cả tử, mẫu thành nhân tử, rút gọn.

Chú ý: Ta thường sử dụng lược đồ Hoocne để phân tích một đa thức thành nhân tử.

- a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-4x+3}$ b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-5x+4}{x^2-1}$ c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2-5x+2}{3x^2-x-10}$ d) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^4-5x^3+4x^2}{2x^2-9x+7}$
- d) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-x-12}{x^3-4x-48}$ e) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{x^3+x^2+x+1}$ f) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-2x-3}{x^3-27}$ g) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3+3x^2+x+3}{x^4-6x^2-27}$
- h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)^3-1}{x^2-2x}$ i) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3+4x^2+x-2}{x^2+3x+2}$ j) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2(2-\frac{1}{3x^2})$ k) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x^3+5x^2-5x-3}{3x-9}$
- l) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-3x^2-2x+8}{x^3-2x-4}$

Ví dụ 4: Tính các giới hạn sau:

a)
$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2+x+4}-4}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x^2+x+4}-4)(\sqrt{x^2+x+4}+4)}{(x^2-9)(\sqrt{x^2+x+4}+4)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x^2+x+4})^2-4^2}{(x^2-9)(\sqrt{x^2+x+4}+4)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+x-12}{(x^2-9)(\sqrt{x^2+x+4}+4)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+4)}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x^2+x+4}+4)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+4}{(x+3)(\sqrt{x^2+x+4}+4)}$$

$$= \frac{3+4}{(3+3)(\sqrt{3^2+3+4}+4)} = \frac{7}{72}$$

b)
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1-\sqrt{1+3x}}{\sqrt{x^2+x+4}-2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(1-\sqrt{1+3x})(1+\sqrt{1+3x})(\sqrt{x^2+x+4}+2)}{(\sqrt{x^2+x+4}-2)(\sqrt{x^2+x+4}+2)(1+\sqrt{1+3x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[1^2-(\sqrt{1+3x})^2](\sqrt{x^2+x+4}+2)}{[(\sqrt{x^2+x+4})^2-2^2](1+\sqrt{1+3x})} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-3x(\sqrt{x^2+x+4}+2)}{(x^2+x)(1+\sqrt{1+3x})} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-3x(\sqrt{x^2+x+4}+2)}{x(x+1)(1+\sqrt{1+3x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-3(\sqrt{x^2+x+4}+2)}{(x+1)(1+\sqrt{1+3x})} = \frac{-3(\sqrt{0^2+0+4}+2)}{(0+1)(1+\sqrt{1+3 \cdot 0})} = -6$$

c)
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{((\sqrt{x})^2-1^2)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{((\sqrt[3]{x})^3-1^3)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt[3]{1^2}+\sqrt[3]{1}+1}{\sqrt{1}+1} = \frac{3}{2}$$

Bài Tập 3: Tính các giới hạn dạng vô định $\frac{0}{0}$:

Dạng 2 (tử hoặc mẫu chứa căn thức)

Phương pháp

- Nhân cả tử và mẫu với cùng một biểu thức liên hợp
- Đưa về dạng 1 (nếu các biểu thức không chứa căn cùng bậc thì ta thêm bớt để đưa về cùng bậc)

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{4x}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+11}-4}{2-\sqrt{x-1}}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2-2x-1}-3}{x^2-4}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{7x-3}-2}{x^2+x-2}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{4x^3+x^2-2x}$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{3x-3}-\sqrt{4x-7}}{x^4-4x^3}$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{4-\sqrt{x^2+16}}$$

$$\text{h) } \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{9x^2+6x+1}{\sqrt{3x+3}-\sqrt{2}}$$

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{\sqrt{x^2-x+30}-2\sqrt{5-2x}}{x^3+8}$$

$$\text{j) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{x^2-3x+2}$$

$$\text{k) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)^2-4x-1}{\sqrt{9+x}-3}$$

$$\text{l) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+2}-x-1}{3-\sqrt{4x+5}}$$

$$\text{m) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-\sqrt{2x+3}}{2-\sqrt{2x-2}}$$

$$\text{n) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt[3]{x+7}-2}$$

$$\text{o) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{4x^2-2x+14}+2x-6}{3x^2-5x+2}$$

$$\text{p) } \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{2x}-4}{\sqrt[3]{5x-13}-3}$$

$$\text{q) } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-x-2}{\sqrt[3]{x+6}-2}$$

$$\text{r) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+x-2}{\sqrt[3]{2x+12}+x}$$

Ví dụ 5: Tính các giới hạn sau:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-2}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(3 - \frac{2}{x} \right)}{x \left(2 - \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{2}{x}}{2 - \frac{1}{x}} = \frac{3-0}{2-0} = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}+1}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x^2} \right)} + 1}{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} + 1}{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} + 1}{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(-\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} + \frac{1}{x} \right)}{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{-\sqrt{1+0}+0}{1+0} = -1 \end{aligned}$$

Chú ý: $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & \text{khi } x \rightarrow +\infty \\ -x & \text{khi } x \rightarrow -\infty \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{4-5x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} \right)}}{x \left(\frac{4}{x} - 5 \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x \left(\frac{4}{x} - 5 \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + x \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x \left(\frac{4}{x} - 5 \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right)}{x \left(\frac{4}{x} - 5 \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{\frac{4}{x} - 5} = \frac{1 + \sqrt{1+0}}{0-5} = \frac{-2}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x-1+\sqrt{x^2+2x-1} \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(x-1+\sqrt{x^2+2x-1} \right) \left(x-1-\sqrt{x^2+2x-1} \right)}{\left(x-1-\sqrt{x^2+2x-1} \right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left[(x-1)^2 - \left(\sqrt{x^2+2x-1} \right)^2 \right]}{x-1-\sqrt{x^2+2x-1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left[x^2-2x+1 - (x^2+2x-1) \right]}{x-1-\sqrt{x^2+2x-1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x+2}{x-1-\sqrt{x^2+2x-1}} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(-4 + \frac{2}{x} \right)}{x-1-\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right)}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(-4 + \frac{2}{x} \right)}{x-1-|x| \sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(-4 + \frac{2}{x} \right)}{x-1+x \sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(-4 + \frac{2}{x} \right)}{x \left(1 - \frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}} = \frac{-4+0}{1-0+\sqrt{1+0-0}} = -2
\end{aligned}$$

Bài Tập 4: Tính giới hạn dạng $\frac{\infty}{\infty}$

Chú ý: $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & \text{khi } x \rightarrow +\infty \\ -x & \text{khi } x \rightarrow -\infty \end{cases}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{3x-2}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3+2x-4}{-2x^3+5x^2+6}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3+5x-4}{-3x^2-25x-2}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4+5x^3-4x^2}{2x^5+5x^3-2x^2+10x-4}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x-12}{x^3-6x^2+9}$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x-5}$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2-1}}{3x+1}$

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2+1}-1}{2x+1}$

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x-\sqrt{x^2+3x}}{3x+1}$

j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+2}-\sqrt{x^2+3x}}{3x+5}$

k) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(4x-1)^3(3x^2+2x+1)}{(2-3x)^5}$

l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x^3+3}+1}{\sqrt{3x^2-4}+3}$

m) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+\sqrt{4x^2-x+1}}{1-2x}$

n) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x}{14x+1+\sqrt{16x^2+x+1}}$

o) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-5}{2-3x+\sqrt{9x^4+x}}$

p) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5|x|-4}{x+2-\sqrt{x^2+3x-5}}$

q) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-\sqrt{x^6+3x^4-7x+2}}{4x-3}$

r) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-4x}}{\sqrt{16x^2+3x+2x}}$

Bài Tập 5: Tính giới hạn dạng: $\infty - \infty$, $0 \times \infty$

Phương pháp:

- Nếu $x \rightarrow \pm\infty$ thì nhân liên hợp để đưa về dạng $\frac{\infty}{\infty}$

- Nếu $x \rightarrow x_0$ thì quy đồng mẫu thức để đưa về dạng $\frac{0}{0}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x + 2 \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2+4x+1} - 2x + 3 \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2-x} + 2x \right)$

$$\begin{array}{lll}
\text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} + x - 1) & \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 - 5x} - 3\sqrt{x^2 + 3}) & \text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \\
\text{g) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 1} - x) & \text{h) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{4x}}} - \sqrt{x}) & \text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+4} - \sqrt{x+2}) \\
\text{j) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (\sqrt[3]{x^3 + 1} - x) & \text{k) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x (\sqrt[3]{x^3 + 1} - x) & \text{l) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 1} - \sqrt{x^2 - 2x}) \\
\text{m) } \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{2}{1-x^2} \right) & \text{n) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x+1} - 1 \right) & \text{o) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{2x^2 + 1} - 1 \right) \\
\text{p) } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{x^2 - 5x + 6} \right) & \text{q) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) & \text{r) } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2 - 4} \right) \\
\text{s) } \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) \sqrt{\frac{3x+1}{x^2 - 4}} & \text{t) } \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x-3)}{4\sqrt{27-x^3}} & \text{u) } \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{(\sqrt{8+2x} - 2)}{\sqrt{x+2}}
\end{array}$$

Ví dụ 6: Tính các giới hạn bên trái, bên phải và giới hạn nếu có của các hàm số sau tại điểm $x=x_0$

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{khi } x > 1 \\ 4-x^2 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases} \text{ với } x_0 = 1.$$

Lời giải:

Nhận xét:

- Khi $x \leq 1$ thì $f(x) = 4 - x^2$

- Khi $x > 1$ thì $f(x) = 2x + 1$

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (4 - x^2) = 4 - 1^2 = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x + 1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$ nên giới hạn của hàm số $f(x)$ tại $x=1$ tồn tại và $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x^2-4} & \text{khi } x < 2 \\ x-1 & \text{khi } x \geq 2 \end{cases} \text{ với } x_0 = 2.$$

Lời giải:

Nhận xét:

- Khi $x < 2$ thì $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$

- Khi $x \geq 2$ thì $f(x) = x - 1$

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-1) = 2-1=1$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ nên giới hạn của hàm số $f(x)$ tại $x=2$ **không** tồn tại

Ví dụ 7: Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x} & \text{khi } x < 0 \\ 2x+m+1 & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$ có giới hạn tại

$$x=0$$

Lời giải:

Nhận xét:

- Khi $x < 0$ thì $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}-1}{x}$

- Khi $x \geq 0$ thì $f(x) = 2x + m + 1$

Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\sqrt{1-x}-1)(\sqrt{1-x}+1)}{x(\sqrt{1-x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[(\sqrt{1-x})^2 - 1]}{x(\sqrt{1-x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x(\sqrt{1-x}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{\sqrt{1-x}+1} = \frac{-1}{\sqrt{1-0}+1} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x + m + 1) = 2 \cdot 0 + m + 1 = m + 1$$

Hàm số có giới hạn tại $x = 0$ khi $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Leftrightarrow -\frac{1}{2} = m + 1 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$

Bài Tập 6: Tính các giới hạn bên trái, bên phải và giới hạn nếu có của các hàm số sau tại điểm $x = x_0$.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} & \text{khi } x > 1 \\ \frac{-x}{2} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases} \quad \text{với } x_0 = 1. \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{4 - x^2}{x - 2} & \text{khi } x < 2 \\ 1 - 2x & \text{khi } x \geq 2 \end{cases} \quad \text{với } x_0 = 2.$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{9-x}-3}{x} & \text{khi } x < 0 \\ \frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x^3+x} & \text{khi } x > 0 \end{cases} \quad \text{với } x_0 = 0.$$

$$\text{d) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{3x^2 + 1} - x - 1} & \text{khi } x > 1 \\ mx + 2 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases} \quad \text{với } x_0 = 1.$$

Bài Tập 7: Tìm giá trị tham số m để các hàm số sau có giới hạn khi $x \rightarrow x_0$.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x^3+1}-1}{x^3} & \text{khi } x > 0 \\ x^2 + 2mx + m & \text{khi } x \leq 0 \end{cases} \quad ; x_0 = 0.$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{3x+11}{5-2x} & \text{khi } x > 5/2 \\ \frac{m(2x^2-7x+5)}{2x^2-9x+10} & \text{khi } x < 5/2 \end{cases} \quad ; x_0 = 5/2$$

Ví dụ 8: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x+2}{x-1}$

Nhận xét: Giới hạn có dạng $\frac{L}{0}$ vì $\lim_{x \rightarrow 1^-} (3x+2) = 3 \cdot 1 + 2 = 5 > 0$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) = 0$

Khi $x \rightarrow 1^-$ thì $x < 1$ nên $x - 1 < 0$

Vậy $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x+2}{x-1} = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3-2x}{2-x}$

Nhận xét: Giới hạn có dạng $\frac{L}{0}$ vì $\lim_{x \rightarrow 2^+} (3-2x) = 3-2 \cdot 2 = -1 < 0$ và $\lim_{x \rightarrow 2^+} (2-x) = 0$

Khi $x \rightarrow 2^+$ thì $x > 2$ nên $2-x < 0$

Vậy $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3-2x}{2-x} = -\infty$

Bài Tập 8: Tính các giới hạn dạng $\frac{L}{0}$.

Phương pháp: Tính $\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} \frac{u(x)}{v(x)}$ với $\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} u(x) = L \neq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} v(x) = 0$

- Tính $\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} u(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} v(x)$

- Xét dấu $v(x)$ khi $x \rightarrow x_0^\pm$. Chú ý: $x \rightarrow x_0^+ \Rightarrow x > x_0$ và $x \rightarrow x_0^- \Rightarrow x < x_0$

- Dựa vào dấu của L và $v(x)$, ta kết luận $\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} \frac{u(x)}{v(x)} = +\infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} \frac{u(x)}{v(x)} = -\infty$

a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x+3}{x-2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+3}{|x-2|}$

c) $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{2x-1}{x-3}$

d) $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{2x+3}{(x-2)(x-5)}$

e) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+3x-2}{x^2-3x+2}$

f) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2+3x-2}{(x-3)^2}$

g) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{(x-1)^2}$

h) $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{\sqrt{x^2+4x-5}}{x-5}$

HÀM SỐ LIÊN TỤC

❖ **Định nghĩa:** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$

➤ **Hàm số $y=f(x)$ liên tục tại $x=x_0$** $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$
 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$

➤ **Hàm số $y=f(x)$ gián đoạn tại $x=x_0$** $\Leftrightarrow y=f(x)$ không liên tục tại x_0

➤ **Hàm số liên tục trên khoảng K** $\Leftrightarrow y=f(x)$ liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó.

➤ **Hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$** $\Leftrightarrow y=f(x)$ liên tục trên $(a; b)$ và

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b).$

🌈 **Đồ thị của hàm số liên tục trên khoảng K là một “đường liền” trên khoảng đó.**

❖ **Tính chất:**

➤ Hàm số đa thức liên tục trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$, hàm số phân thức hữu tỉ và hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng của tập xác định của chúng.

➤ Giả sử $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là 2 hàm số liên tục tại điểm x_0 . Khi đó:

• Các hàm số $f(x)+g(x); f(x)-g(x); f(x)g(x)$ liên tục tại x_0 .

• Hàm số $\frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$

➤ Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì

• $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $[a; b]$ nghĩa là: $\exists x_0 \in [a; b]: f(x) \leq f(x_0), \forall x \in [a; b]$

- $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $[a; b]$ nghĩa là: $\exists x_0 \in [a; b]: f(x) \geq f(x_0), \forall x \in [a; b]$

❖ **Định lý:** Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a).f(b)<0$ thì tồn tại ít nhất 1 điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c)=0$

Hay : Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a).f(b)<0$. Khi đó phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(a; b)$.

Ví dụ 1: Xét tính liên tục của các hàm số sau tại $x = x_0$

$$a) f(x) = \begin{cases} 3-2x & \text{khi } x > 1 \\ 2-x^2 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases} \text{ với } x_0 = 1.$$

Lời giải:

Nhận xét:

- Khi $x > 1$ thì $f(x) = 3 - 2x$

- Khi $x \leq 1$ thì $f(x) = 2 - x^2$

Ta có $f(1) = 2 - 1^2 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2 - x^2) = 2 - 1^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3 - 2x) = 3 - 2.1 = 1$$

Vậy $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$ nên hàm số liên tục tại $x = 1$

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{x^2+4x-3} & \text{khi } x > 3 \\ 2x+1 & \text{khi } x \leq 3 \end{cases} \text{ với } x_0 = 3.$$

Lời giải:

Nhận xét:

- Khi $x > 3$ thì $f(x) = \frac{x-3}{x^2+4x-3}$

- Khi $x \leq 3$ thì $f(x) = 2x+1$

Ta có $f(3) = 2.3+1 = 7$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (2x+1) = 2.3+1 = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{x^2+4x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{(x-3)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{4}$$

Vậy $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ nên hàm số gián đoạn tại $x = 3$

Ví dụ 2: Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} & \text{khi } x > 1 \\ 2mx+1 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ liên tục tại

$x = 1$.

Lời giải:

Nhận xét:

- Khi $x > 1$ thì $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$

- Khi $x \leq 1$ thì $f(x) = 2mx+1$

Ta có $f(1) = 2.m.1+1 = 2m+1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2mx + 1) = 2m + 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{((\sqrt{x+3})^2 - 2^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\sqrt{x+3}+2) = 4 \end{aligned}$$

Vậy hàm số liên tục tại $x=1$ khi $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 2m+1=4 \Leftrightarrow m=\frac{3}{2}$

Ví dụ 3: Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x}{x-2} & \text{khi } x < 2 \\ 1-x & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$ **trên tập xác định.**

Lời giải:

Hàm số có TXĐ $D = \mathbb{R}$

- Khi $x < 2$ thì $f(x) = \frac{x^2-2x}{x-2}$ nên hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty; 2)$

- Khi $x > 2$ thì $f(x) = \frac{x^2-2x}{x-2}$ nên hàm số liên tục trên khoảng $(2; +\infty)$

- Xét tại $x=2$

Ta có $f(2) = 1-2 = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2-2x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} x = 2$$

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2 \neq f(2) = -1$ nên hàm số gián đoạn tại $x=2$

Vậy hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$; hàm số gián đoạn tại $x=2$.

Ví dụ 4: Chứng minh rằng phương trình $x^3 - 4x - 1 = 0$ có ít nhất 1 nghiệm trên đoạn $[-1; 0]$

Lời giải:

Nhận xét: Đặt $f(x) = x^3 - 4x - 1$, hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[-1; 0]$

Ta có $f(-1) = (-1)^3 - 4(-1) - 1 = 2$, $f(0) = 0^3 - 4 \cdot 0 - 1 = -1$ nên $f(-1) \cdot f(0) < 0$ nên $f(x)$ có ít nhất 1 nghiệm trên khoảng $(-1; 0)$

Vậy phương trình $x^3 - 4x - 1 = 0$ có ít nhất 1 nghiệm trên đoạn $[-1; 0]$

Ví dụ 5: Chứng minh rằng phương trình $x^3 - 3x - 1 = 0$ (*) có đúng 3 nghiệm thực.

Lời giải:

Nhận xét: Đặt $f(x) = x^3 - 3x - 1$, hàm số xác định và liên tục trên tập số thực $\mathbb{R}$ nên hàm số liên tục trên đoạn $[-3; 2]$

Ta có $f(-2) = (-2)^3 - 3(-2) - 1 = -3 < 0$

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) - 1 = 1 > 0$$

$$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 - 1 = -1 < 0$$

$$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 - 1 = 1 > 0$$

- Trên đoạn $[-2; -1]$, hàm số liên tục và có $f(-2) \cdot f(-1) < 0$ nên phương trình (*) có ít nhất 1 nghiệm trên khoảng $(-2; -1)$ (1)
- Trên đoạn $[-1; 0]$, hàm số liên tục và có $f(-1) \cdot f(0) < 0$ nên phương trình (*) có ít nhất 1 nghiệm trên khoảng $(-1; 0)$ (2)
- Trên đoạn $[0; 2]$, hàm số liên tục và có $f(0) \cdot f(2) < 0$ nên phương trình (*) có ít nhất 1 nghiệm trên khoảng $(0; 2)$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra phương trình (*) có ít nhất 3 nghiệm phân biệt.

Mà $f(x)$ là hàm số bậc 3 nên phương trình (*) có tối đa 3 nghiệm thực.

Vậy phương trình (*) có đúng 3 nghiệm phân biệt.

Bài Tập 1: Xét tính liên tục của các hàm số sau tại điểm $x = x_0$

Phương pháp:

- Tính $f(x_0)$.
- Tính $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ (hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$)
- So sánh $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ với $f(x_0)$. Kết luận: Hàm số liên tục tại $x = x_0$ hoặc hàm số gián đoạn tại $x = x_0$

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \begin{cases} \frac{4-x^2}{x-2} & \text{khi } x < 2 \\ 1-2x & \text{khi } x \geq 2 \end{cases} \quad \text{với } x_0=2. & \text{b) } f(x) &= \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4} & \text{khi } x > 2 \\ \frac{1}{2x-20} & \text{khi } x \leq 2 \end{cases} \quad \text{với } x_0=2. \\ \text{c) } f(x) &= \begin{cases} \frac{\sqrt{3x+10}-x-4}{x+2} & \text{khi } x \neq -2 \\ -\frac{1}{4} & \text{khi } x = -2 \end{cases} ; x_0=-2 & \text{d) } f(x) &= \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x^3}-1}{x^2} & \text{khi } x < 0 \\ x+m & \text{khi } x \geq 0 \end{cases} ; x_0=0. \\ \text{e) } f(x) &= \begin{cases} \frac{x+3}{x-2} & \text{khi } x \neq -1 \\ 2 & \text{khi } x = -1 \end{cases} ; x_0=-1 & \text{f) } f(x) &= \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{2-x}-1} & \text{khi } x < 1 \\ 33-m^2x & \text{khi } x \geq 1 \end{cases} ; x_0=1 \end{aligned}$$

Bài Tập 2: Xét tính liên tục của các hàm số sau trên tập xác định của nó

Phương pháp: Sử dụng tính chất của các hàm đa thức, phân thức liên tục trên từng khoảng của tập xác định, sau đó xét tính liên tục của hàm số tại các điểm đặc biệt. Kết luận.

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \begin{cases} \frac{x^2-2x-3}{x-3} & \text{khi } x \neq 3 \\ 5 & \text{khi } x = 3 \end{cases} & \text{b) } f(x) &= \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x-2} & \text{khi } x < 2 \\ 5x-3 & \text{khi } x \geq 2 \end{cases} \\ \text{c) } f(x) &= \begin{cases} \frac{2x+4}{2x^2-5x+2} & \text{khi } x < -2 \\ 3mx+5 & \text{khi } -2 \leq x < -\frac{1}{2} \end{cases} & \text{d) } f(x) &= \begin{cases} \frac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{khi } x < 1 \\ 3x+m & \text{khi } x \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Bài Tập 3: Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} -3x+a^2+a & \text{khi } x < 1 \\ x^2+3x-1 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$

a) Liên tục tại $x=1$

b) Liên tục trên tập xác định.

Bài Tập 4: Cho 3 hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)^3}{|x-1|} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$; $g(x) = \begin{cases} \frac{2x-2}{|x-1|} & \text{khi } x \neq 1 \\ b & \text{khi } x = 1 \end{cases}$

và $h(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{3x+5}}{x-1} & \text{khi } x \geq -3; x \neq 1 \\ 0 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$

1. Tìm a để hàm số f(x) liên tục trên R
2. Chứng minh rằng hàm số y=g(x) không thể liên tục trên R.
3. Chứng minh hàm số h(x) liên tục trên $[-3; +\infty)$

Bài Tập 5: Tìm tham số để các hàm số sau liên tục trên tập xác định

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - 2}{x-2} & \text{khi } x > 2 \\ ax + \frac{1}{4} & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$

b) $h(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{khi } x \in [1; +\infty) \\ a-1 & \text{khi } x \in (-\infty; 1) \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x} & \text{khi } x < 0 \\ m + \frac{4-x}{x+2} & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$

d) $h(x) = \begin{cases} \sin x & \text{khi } x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \\ ax + b & \text{khi } x \in (-\infty; -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}; +\infty) \end{cases}$

Bài Tập 6: Chứng minh phương trình f(x) có nghiệm trên đoạn [a; b]

Phương pháp: áp dụng định lý: “Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a).f(b) < 0$. Khi đó phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(a; b)$ ”. Cụ thể như sau:

- Ta cần tìm 2 số a, b sao cho f(x) liên tục trên $[a; b]$ và $f(a).f(b) < 0$.
- Áp dụng định lý trên để kết luận pt có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(a; b)$

Chú ý: Nếu pt có chứa tham số thì chọn a, b sao cho f(a), f(b) không còn chứa tham số hoặc chứa tham số nhưng có dấu không đổi hoặc f(a), f(b) chứa tham số nhưng tích f(a).f(b) luôn âm.

1. Chứng minh pt: $3x^3 + 2x - 2 = 0$ có ít nhất 1 nghiệm trên đoạn $[0; 1]$.
2. Chứng minh pt: $4x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0$ có ít nhất 2 nghiệm trên $(-1; 1)$
3. Chứng minh pt: $2x^3 - 10x - 7 = 0$ có ít nhất 2 nghiệm.
4. Chứng minh $2x^3 - 6x + 1 = 0$ có 3 nghiệm trên $(-2; 2)$
5. Phương trình $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$ có nghiệm hay không trong khoảng $(-1; 3)$?
6. Chứng minh pt: $x^3 - 3x + 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.
7. Chứng minh phương trình $x^5 - 5x - 1$ có ít nhất ba nghiệm.

Bài Tập 7: Chứng minh

1. Chứng minh các phương trình sau luôn có nghiệm:

a) $\cos x + m \cos 2x = 0$

b) $m(x-1)^3(x+2) + 2x + 3 = 0$

c) $(m^2 + m + 1)x^4 + 2x - 2 = 0$

d) $(1-m^2)(x+1)^3 + x^2 - x - 3 = 0$

e) $m(2 \cos x - \sqrt{2}) = 2 \sin 5x + 1$

f) $(1-m^2)x^5 - 3x - 1 = 0$.

2. Chứng minh pt: $x^3 - 3x = m$ có ít nhất hai nghiệm với mọi giá trị m thuộc khoảng $(-2; 2)$

3. Giả sử cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=f(x + \frac{1}{2})$ đều liên tục trên $[0; 1]$ và $f(0)=f(1)$. Chứng minh pt:

$f(x) - f(x + \frac{1}{2}) = 0$ luôn có nghiệm trong đoạn $[0; \frac{1}{2}]$

4. Cho pt: $x^4 - x - 3 = 0$. Chứng minh phương trình này có nghiệm x_0 thuộc $(1; 2)$ và $x_0 > \sqrt[7]{12}$

Hình học: BÀI TẬP ÔN TẬP VỀ QUAN HỆ VUÔNG GÓC

BÀI 1. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp (BCD)$. Trong tam giác BCD vẽ các đường cao BE và DF cắt nhau tại O . Trong mp(ACD) vẽ $DK \perp AC$. Gọi H là trực tâm của tam giác ACD .

- a) Chứng minh $CD \perp (ABE)$, $DF \perp (ABC)$, $AC \perp (DFK)$
- b) Chứng minh $(ACD) \perp (ABE)$ và $(ACD) \perp (DFK)$.
- c) Chứng minh $OH \perp (ACD)$.

BÀI 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có các mặt bên SAB và SAD cùng vuông góc với $(ABCD)$. Biết $ABCD$ là hình vuông và $SA = AB$. Gọi M là trung điểm của SC . Chứng minh:

- a) Chứng minh $SA \perp (ABCD)$, $(SBC) \perp (SAB)$, $(SCD) \perp (SAD)$
- b) $(SAC) \perp (SBD)$.
- c) $(SCD) \perp (ABM)$.

BÀI 3. Cho tam giác đều ABC . Trên đường thẳng d vuông góc với mp(ABC) tại A lấy điểm S .

Gọi D là trung điểm của BC .

- a) Chứng minh $BC \perp (SAD)$, $(SAD) \perp (SBC)$.
- b) Kẻ $CI \perp AB$, $CK \perp SB$. Chứng minh $SB \perp (ICK)$.
- c) Kẻ $BM \perp AC$, $MN \perp SC$. Chứng minh $SC \perp BN$.
- d) Chứng minh $(CIK) \perp (SBC)$ và $(MBN) \perp (SBC)$.
- e) MB cắt CI tại G , CK cắt BN tại H . Chứng minh $GH \perp (SBC)$.
- f) Chứng minh 6 điểm B, C, I, K, M, N cách đều D .

BÀI 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a , SAB là tam giác đều, SCD là tam giác vuông cân đỉnh S . Gọi I, J là trung điểm của AB và CD .

- a) Tính các độ dài các cạnh của hình chóp $S.ABCD$ theo a
- b) Tính các cạnh của tam giác SIJ theo a . Chứng minh tam giác SIJ vuông tại S .
- c) Chứng minh $SI \perp (SCD)$, $SJ \perp (SAB)$.
- d) Gọi SH là đường cao của tam giác SIJ . Chứng minh $SH \perp AC$ và tính độ dài SH theo a .
- e) Gọi M là điểm thuộc BD sao cho $BM \perp SA$. Tính AM theo a .